Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2015 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найдите $f(2)$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}$.

Ответ: 2

Найдите $f(3)$, если $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{x} + \frac{7}{12}$.

Ответ: 3

Найдите $f(5)$, если $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{x} - \frac{7}{15}$.

Ответ: 2

Найдите $f(3)$, если $f(x) = \frac{x}{7} + \frac{2}{x} - \frac{2}{21}$.

Ответ: 1

Задача 2.

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

Ответ: 39

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.

Ответ: 85

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 8x - 3 = 0$.

Ответ: 70

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 10x + 4 = 0$.

Ответ: 92

Задача 3.

Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x + \cos x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{13\pi}{12} + 2n\pi, -\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\cos x - \sqrt{2}\cos 2x + \sin x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{17\pi}{12} + 2n\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{12} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{12} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{12} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите уравнение $\log_x |2x^2-3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$

Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x-1| = 4\log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Решите уравнение $\log_x |3x^2-4| = 4\log_{|3x^2-4|} x$.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}$

Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |5x-1| = 4\log_{|5x-1|} \sqrt{x+1}$.

Ответ: $x = -\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2+\sqrt{14}}{5}$

Задача 5.

Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

Ответ: $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться AB, если $\angle ABC = 45°$?

Ответ: $3 \pm \sqrt{7}$

Окружность касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle BAC = 30°$ и $AC = 2/3$?

Ответ: $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

Окружность касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle ABC = 45°$ и $AB = 1$?

Ответ: $3 \pm \sqrt{7}$

Задача 6.

Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Ответ: 1 км

Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

Ответ: 2 км

Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав четверть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий и, проехав 4 км, встретил Василия. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если известно, что Василий добрался до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б. Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Ответ: 20 км

Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав три четверти пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий. На каком расстоянии от вершины он встретит Григория, если длина трассы равна 2100 метров, а Василий закончит спуск ровно тогда, когда Григорий доберётся до вершины горы? Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

Ответ: 900 м

Задача 7.

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

Ответ: 13/6

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

Ответ: 15/2

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{13}$. Найдите расстояние между прямыми AE и BD, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

Ответ: 6

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$ равно $\sqrt{21}$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

Ответ: 14/5

Задача 8.

Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}), \ \beta = 0$

Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2 - \cos x}{2 - \cos 2x} + \frac{2 - \cos 2x}{(y^2 + 1)^2} + \frac{(y^2 + 1)^2}{|y| + 1} + \frac{|y| + 1}{2 - \cos x}.$$

Ответ: $x = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}), \ y = 0$

Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\cos\alpha}{2-\cos 2\alpha} + \frac{2-\cos 2\alpha}{2\beta^4+\beta^2+1} + \frac{2\beta^4+\beta^2+1}{|\beta|+1} + \frac{|\beta|+1}{4-3\cos\alpha}\,.$$

Ответ: $\alpha = 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}),\ \beta = 0$

Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\sin x}{2+\cos 2x} + \frac{2+\cos 2x}{(y+1)^2} + \frac{(y+1)^2}{2\sqrt{y}+1} + \frac{2\sqrt{y}+1}{2-\sin x}\,.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}),\ y = 0$